Зная, как связаны между собой ускорение и координата колеблющегося тела, можно на основе математического анализа найти зависимость координаты от времени.

Ускорение — вторая производная координаты по времени. Мгновенная скорость точки, как вам известно из курса математики, представляет собой производную координаты точки по времени. Ускорение точки — это производная её скорости по времени, или вторая производная координаты по времени. Поэтому уравнения (3.4) и (3.10) можно записать так: где х — вторая производная координаты по времени, соп = — для пружинного маятника и (Oq = у для математического маятника. Уравнение (3.11) — дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решением которого является функция синуса или косинуса, т. е. координата тела, совершающего свободные колебания, меняется с течением времени по формуле синуса или косинуса.

На рисунке 3.3 показано изменение координаты точки со временем по формуле косинуса.

Гармоническими колебаниями называются периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по формуле синуса или косинуса. Такие колебания являются незатухающими.

Запишем решение уравнения (3.11) в виде.

Найдём скорость точки, совершающей гармонические колебания, где хт — амплитуда колебаний.

Ускорение, равное второй производной от х, имеет вид.

Подставив выражение для ах в уравнение (3.11), получим тождество. Следовательно, функция (3.12) есть решение исходного уравнения (3.11). Решением этого уравнения будет также функция х = xmsin(D0£.

График зависимости координаты тела от времени согласно формуле (3.12) представляет собой косинусоиду (см. рис. 3.3).

Характеристики колебаний.

Амплитудой гармонических колебаний называется модуль наибольшего смещения тела от положения равновесия.

Амплитуда может иметь различные значения в зависимости от того, насколько мы смещаем тело от положения равновесия в начальный момент времени, или от того какая скорость сообщается телу.

Амплитуда определяется энергией, сообщаемой телу.

При колебаниях движения тела периодически повторяются.

Промежуток времени, за который система совершает одно полное колебание, называется периодом Т колебаний.

Зная период, можно определить частоту колебаний.

Частота v колебаний — число колебаний в единицу времени, например за секунду.

Если одно колебание совершается за время Т, то число колебаний за секунду.

В Международной системе единиц (СИ) частота колебаний равна единице, если за секунду совершается одно полное колебание.

Единица частоты называется герцем (сокращённо: Гц) в честь немецкого физика Г. Герца.

Число колебаний за 2л с равно.

Величина <в0 — циклическая, или круговая, частота колебаний.

Если в уравнении (3.12) время t равно одному периоду, то со0Т = 2л. Таким образом, если в момент времени t = О смещение х = хт, то и в момент времени t — Т смещение х = хт, т. е. через промежуток времени, равный одному периоду, колебания повторяются.

Собственной частотой колебательной системы называют частоту свободных колебаний.

Зависимость частоты и периода свободных колебаний от свойств системы. Собственная частота колебаний тела, прикреплённого к пружине, согласно уравнению (3.4) равна.

Она тем больше, чем больше жёсткость пружины k, и тем меньше, чем больше масса тела т. Это легко понять: жёсткая пружина сообщает телу большее ускорение, быстрее меняет скорость тела. А чем тело массивнее, тем медленнее оно изменяет скорость под действием силы. Период колебаний равен.

Период колебаний тела на пружине и период колебаний маятника при малых углах отклонения не зависят от амплитуды колебаний.

Собственная частота колебаний математического маятника согласно формуле (3.10) при малых углах отклонения нити от вертикали зависит от длины маятника и ускорения свободного падения.

Период же этих колебаний равен.

Период колебаний возрастает с увеличением длины маятника. От массы маятника он не зависит. Это легко проверить на опыте с различными маятниками. Зависимость периода колебаний от ускорения свободного падения также можно обнаружить. Чем меньше g, тем больше период колебаний маятника и, следовательно, тем медленнее идут часы с маятником.

Часы с маятником в виде груза на стержне отстанут за сутки почти на 3 с, если их поднять из подвала на верхний этаж Московского университета (высота 200 м). И это произойдёт только за счёт уменьшения ускорения свободного падения с высотой.

В районах, где залегают плотные породы, ускорение g несколько большее. Это учитывают при поисках полезных ископаемых.

Так, железная руда обладает повышенной плотностью по сравнению с обычными породами. Проведённые под руководством академика А, А. Михайлова измерения ускорения свободного падения под Курском позволили уточнить места залегания железной руды. Сначала они были обнаружены посредством магнитных измерений.

Согласно полученным формулам (3.17) и (3.19) период гармонических колебаний зависит от параметров системы (жёсткости пружины, длины нити и т. д.).

Фаза колебаний. Введём ещё одну величину, характеризующую гармонические колебания, — фазу колебаний.

При заданной амплитуде колебаний координата колеблющегося тела в любой момент времени однозначно определяется аргументом косинуса или синуса.

Величину ф, стоящую под знаком функции косинуса или синуса, называют фазой колебаний, описываемых этой функцией.

Выражается фаза в угловых единицах — радианах.

Фаза определяет не только значение координаты, но и значения других физических величин, например скорости и ускорения, изменяющихся также по гармоническому закону. Поэтому можно сказать, что фаза определяет при заданной амплитуде состояние колебательной системы в любой момент времени.

В этом состоит значение понятия фазы.

Колебания с одинаковыми амплитудами и частотами могут различаться фазами.

Отношение ~ указывает, сколько полных колебаний совершено от момента начала колебаний. Любому значению времени t соответствует значение фазы ф, выраженное в радианах. Так, по прошествии времени (четверти периода) ф = — , по прошествии половины периода ф = тс, по прошествии целого периода ф = 2я и т. д.

Можно изобразить на графике зависимость координаты колеблющейся точки не от времени, а от фазы. На рисунке 3.4 показана та же косинусоида, что и на рисунке 3.3, но на горизонтальной оси отложены вместо времени различные значения фазы ф.

Описание гармонических колебаний с помощью косинуса и синуса. Вы уже знаете, что при гармонических колебаниях координата тела изменяется со временем по формуле косинуса или синуса.

Так как, то одно и то же колебание мы можем описать этими двумя тригонометрическими функциями, различающимися аргументом на — . Выбор функции зависит от начальных условий. Если смещение от положения равновесия максимально в начальный момент, то для описания колебаний удобнее пользоваться формулой х = xm cos (00t.

Если бы мы возбудили колебания покоящегося тела кратковременным толчком, то координата тела в начальный момент была бы равна нулю и изменения координаты со временем было бы удобнее описывать с помощью синуса, т. е. формулой, так как при этом начальная фаза равна нулю.

Если в начальный момент времени (при t = 0) фаза колебаний равна ф0, то уравнение колебаний можно записать в виде.

Сдвиг фаз. Колебания, происходящие с одинаковыми частотой и амплитудой, могут отличаться друг от друга фазами.

Рассмотрим два колебания: х = хт sin ю0г и х = хт cos со0t. Так как cos a>0t = sin (со0t + п/2), то разность фаз, или, как часто говорят, сдвиг фаз, этих колебаний составляет ^ . На рисунке 3.5 показаны графики зависимости координат от времени для этих двух гармонических колебаний, сдвинутых по фазе на — . График 1 соответствует колебаниям, совершающимся по формуле синуса: а график 2 — колебаниям, совершающимся по формуле косинуса:

Превращения энергии при гармонических колебаниях. Пусть в положении равновесия потенциальная энергия колебательной системы равна нулю. Смещая тело на расстояние хт, мы сообщаем колебательной системе потенциальную энергию Wn и таким образом создаём системе условия для начала движения тела (колебаний).

При движении тела потенциальная энергия системы уменьшается. Но одновременно увеличивается скорость и, следовательно, возрастает кинетическая энергия. В момент прохождения телом положения равновесия потенциальная энергия колебательной системы становится равной нулю (Wn = 0 при х = 0). Кинетическая же энергия достигает максимума.

После прохождения положения равновесия скорость тела начинает уменьшаться. Следовательно, уменьшается и кинетическая энергия. Потенциальная же энергия системы снова увеличивается. Когда смещение тела вновь достигает максимума, то кинетическая энергия становится равной нулю. Таким образом, при колебаниях периодически происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Полная механическая энергия при гармонических колебаниях равна сумме кинетической и потенциальной энергий колебательной системы:

Полная механическая энергия изолированной системы, в которой отсутствуют силы сопротивления, сохраняется (согласно закону сохранения механической энергии) неизменной:

Она равна либо потенциальной энергии в момент максимального отклонения от положения равновесия, либо же кинетической энергии в момент, когда тело проходит положение равновесия.

Гармонические колебания — частный случай колебаний, происходящих в природе и технике. Однако любой колебательный процесс может быть представлен как сумма гармонических колебаний.

Приведём таблицу основных характеристик гармонических колебаний. Уравнение колебаний.